KJ-1267

B.Sc. (Part - I)

Term End Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - II

Calculus

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) दिखाइए कि निम्नलिखित फलन $f(x)$, बिन्दु $x = 0$ पर संतत है, पर $f'(0)$ अस्तित्व नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

Show that the function $f(x)$ defined below is continuous at $x = 0$, but $f'(0)$ does not exist :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

(*b*) यदि $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)x\, y_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0$$

If $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$, then prove that

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)x\, y_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0$$

(*c*) टेलर प्रमेय से फलन $f(x) = \tan^{-1}x$ का $(x - \pi/4)$ की घातों में प्रसार ज्ञात कीजिए।

Using Taylor's theorem expand the function $f(x) = \tan^{-1}x$ in a power of $(x - \pi/4)$.

इकाई / Unit-II

2. (*a*) निम्नलिखित वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$$

Find asymptotes of the following curve

$$y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$$

(*b*) निम्नलिखित वक्र का अनुरेखण कीजिए

$$y^2(a - x) = x^2(a + x)$$

Trace the following curve

$$y^2(a - x) = x^2(a + x)$$

(*c*) सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ की बिन्दु $(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta)$ पर वक्रता त्रिज्या $3a\sin\theta\cdot\cos\theta$ है।

Prove that the radius of curvature of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ at the point $(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta)$ is $3a\sin\theta\cdot\cos\theta$.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) = -\frac{\pi}{2}\log 2 \text{ अथवा } \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) = -\frac{\pi}{2}\log 2 \text{ or } \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

(*b*) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को x-अक्ष के परितः घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of solid generated by revolution of ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ about the x-axis.

(*c*) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ तथा रेखा $x + y = a$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
(प्रथम अक्षांश में)

Find the area included between the circle $x^2 + y^2 = a^2$ and the line $x + y = a$.
(In first quadrant)

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए

$$y(1 + xy)dx + x(1 - xy)dy = 0$$

Solve the following differential equation

$$y(1 + xy)dx + x(1 - xy)dy = 0$$

(*b*) निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

Solve the following differential equation

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

(*c*) $r^n \sin n\,\theta = a^n$ से निरूपित वक्रकुल के लम्बकोणीय संछेदी का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the orthogonal trajectories of the family of curves $r^n \sin n\,\theta = a^n$.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \cdot x^2$$

Solve

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \cdot x^2$$

(*b*) प्राचल विचरण विधि से निम्नलिखित समीकरण का हल ज्ञात कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x$$

Solve the following equation by method of variation of parameter

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x$$

(*c*) निम्नलिखित युगपत् अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 3e^t$$

$$3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = 4e^{2t}$$

(7)

Solve the following simultaneous differential equation

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 3e^{t}$$

$$3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = 4e^{2t}$$

———